Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:____________________________
Carnet:_____________ __ Sección:______

2do. Parcial de Matemáticas III. Tipo A (35%)

1. (8 puntos) Dada la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Halle una base para el espacio de filas, R_H, de H
   b) Halle una base para el espacio de columnas, C_H, de H
   c) Halle una base para el espacio nulo, N_H, de H
   d) Halle rango y nulidad de H.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Entonces el espacio fila es $R_H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$.

b) El espacio columna $C_H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

$$6x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0$$

$$-2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\left(-\frac{3}{2}x_3 - x_4\right) - 2x_3 - x_4 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$

c) $$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \Rightarrow N_H = gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d) $$\rho(H) = \dim(imagen) = \dim(C_H) = 3$$
$$\nu(H) = \dim(N_H) = 2$$

2. (8 puntos) Dados el plano π : x + y + mz = n y la recta $L: \frac{x-3}{-1} = y = \frac{z}{-2}$

   a) Calcule m y n para que π y L sean paralelos y L no este contenida en π.
   b) Calcule m y n para que π contenga a L.
   c) Con el plano calculado en la parte b), halle la intersección con la recta $R: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-4}$.
   d) Halle la distancia entre el punto conseguido en la parte c) y el punto dado de la recta L.

Solución:

a) Si el plano y la recta son paralelos, el vector director de la recta y el vector normal al plano son ortogonales, por lo que su producto punto es cero, luego:
$$(1 \quad 1 \quad m).(-1 \quad 1 \quad -2) = 0 \Rightarrow -1 + 1 - 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$
Como L no esta contenida en el plano, entonces el punto (3,0,0) por el que pasa la recta no debe estar sobre el plano, así
$$3 + 0 + 0 \neq n \Rightarrow n \neq 3$$
b) Si el plano contiene a L, entonces *m = 0* y *n = 3*.
c) $(3-t) + (-2-t) = 3 \Rightarrow -2t = 2 \Rightarrow t = -1$. Entonces el punto de intersección es (4,-1,5).
d) $d = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

3. (6 puntos) Halle los valores de la constante *k* para los cuales el vector (3-k, 4, 2k) pertenece a gen{(1,4,1),(2,6,1)}.

Solución:

$$\begin{pmatrix}3-k\\4\\2k\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2b=3-k\\4a+6b=4\\a+b=2k\end{cases}$$

$\begin{pmatrix}1&2&3-k\\4&6&4\\1&1&2k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3-k\\0&-2&-8+4k\\0&-1&-3+3k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3-k\\0&0&-2-2k\\0&1&3-3k\end{pmatrix}$. Entonces para que el vector pertenezca al generado *k* = -1.

4. (5 puntos) ¿Es $H=\{A\in M_{22}|\det A=0\}$ un subespacio vectorial de $V=M_{22}$? (Si su respuesta es afirmativa, demuestre que es un subespacio. Si su respuesta es negativa, pruebe que alguna de las condiciones de cerradura falla).

Solución: Sean $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=0$ y $B=\begin{pmatrix}3&1\\6&2\end{pmatrix}\Rightarrow|B|=0$.

Entonces $A+B=\begin{pmatrix}4&3\\7&4\end{pmatrix}\Rightarrow|A+B|=-5\neq 0$. Como no se cumple la cerradura de la suma, no es un subespacio.

5. (8 puntos) Sea $H=\{p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2\in P_2 : p_1=2p_0+p_2\}$
   a) Demuestre que H es un subespacio de $V=P_2$.
   b) Halle una base para H.

Solución:

a) El polinomio $p(x)=0$, es un polinomio que cumple con la condición, por lo tanto H es no vacío.
   Sean $a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ y $b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ dos polinomios en H. Luego
   $$a(x)+b(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+b_0+b_1x+b_2x^2=a_0+(2a_0+a_2)x+a_2x^2+b_0+(2b_0+b_2)x+b_2x^2$$
   $$=(a_0+b_0)+[2(a_0+b_0)+(a_2+b_2)]x+(a_2+b_2)x^2$$

   Por lo tanto cumple con la cerradura de la suma.

b) Para hallar la base
   $$p_0+p_1x+p_2x^2=p_0+(2p_0+p_2)x+p_2x^2=p_0(1-2x)+p_2(x+x^2).$$

Luego, $H=gen\{1-2x,x+x^2\}$

Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:____________________________
Carnet:_____________ __ Sección:______

2do. Parcial de Matemáticas III. Tipo B (35%)

1. (8 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

a) Halle el espacio fila y el espacio columna de A, con sus respectivas dimensiones.
b) Halle el espacio nulo y la imagen de A, con sus respectivas dimensiones.

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & -6\\ 0 & -5 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) $R_A = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(R_A)=2$, $C_A = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$, $\dim(C_A)=2$

$5y+6z=0 \Rightarrow y=-\frac{6}{5}z$

b) $x+2y+3z=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}z$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}z\\-\frac{6}{5}z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}z \Rightarrow N_A = gen\left\{\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow \dim(N_A)=1$$

$$imagenA = C_A = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\},\ \dim(imagenA)=\dim(C_A)=2$$

2. (8 puntos) El plano π pasa por los puntos P = (3,1,0), Q=(1,2,1), R=(-1,1,1). El plano π_1 tiene el vector normal n_1 = (2,-4,1) y pasa por el punto S=(1,2,3)

   a) Encuentren las ecuaciones de los planos π y π_1.
   b) Comprueben que los planos π y π_1 no son paralelos
   c) Encuentren ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos π y π_1.

Solución:

a) Con P y Q formamos el vector $\vec{PQ} = (-2,1,-1)$ y con R y Q formamos el vector $\vec{RQ} = (2,1,0)$. Como ambos están sobre el plano hacemos el producto cruz entre ellos para conseguir el vector normal al plano.

$$\vec{RQ} x \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

Luego la ecuación del plano es $\pi : -1(x-3) + 2(y-1) + 4z = 0 \Rightarrow -x + 2y + 4z = -1$

$$\pi_1 = 2(x-1) - 4(y-2) + (z-3) = 0 \Rightarrow 2x - 4y + z = -3$$

b) Los planos serán paralelos si los vectores normales son paralelos, y el producto cruz entre ellos es el vector nulo:

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 18\hat{i} + 9\hat{j} \neq \vec{0}$, por lo tanto no son paralelos.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 9 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{9}{8}z - \frac{5}{8}$. Si tomamos z como el

$x = 2\left(-\frac{9}{8}z - \frac{5}{8}\right) + 4z - 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4}z - \frac{5}{4}$

parámetro entonces

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4} + \frac{5}{4}t \\ y = -\frac{5}{8} - \frac{9}{8}t \\ z = t \end{cases}$$

3. (6 puntos) ¿Para que valores de *c* son linealmente dependientes los vectores (1,0,1), (-2,-1,-2) y (c,1,1)?

Para que los vectores sean linealmente independientes, el determinante debe ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & c \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & c \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

4. (5 puntos) ¿Es $H = \left\{ f \in C[-5,1] \middle| \int_{-5}^{1} f(x)dx = \pi \right\}$ un subespacio vectorial de $V = C[-5,1]$? (Si su respuesta es afirmativa, demuestre que es un subespacio. Si su respuesta es negativa, pruebe que alguna de las condiciones de cerradura falla).

Solución: Sean *g* y *f* funciones en H, por lo tanto $\int_{-5}^{1} g(x)dx = \int_{-5}^{1} f(x)dx = \pi$. Luego $\int_{-5}^{1} (f+g)(x)dx = \int_{-5}^{1} f(x)dx + \int_{-5}^{1} g(x)dx = \pi + \pi = 2\pi$. Como no se cumple la cerradura de la suma, no es un subespacio.

5. (8 puntos) Sea $H = \{(x,y,z) \in \Re^3 | x + y + z = 0, x - 2y + 3z = 0\}$

   a) Demuestre que H es un subespacio de $V = \Re^3$.
   b) Halle una base para H.

Solución:

a) El vector (0,0,0) cumple con ambas condiciones de H, por lo tanto es no vacío.

   Sean $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in H$

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix} \Rightarrow (x+a)+(y+b)+(z+c) = (x+y+z)+(a+b+c) = 0$$

   $$(x+a) - 2(y+b) + 3(z+c) = (x-2y+3z) + (a-2b+3c) = 0$$

   Y

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = 0$$

$$\alpha x - 2\alpha y + 3\alpha z = \alpha(x - 2y + 3z) = 0$$

Como se cumplen ambas condiciones de cerradura y es no vacío, entonces H es un subespacio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \frac{2}{3}z \Rightarrow x = -\frac{5}{3}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} z \Rightarrow H = gen\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$